Matemáticas discretas

Aplicaciones y ejercicios

José Francisco Villalpando Becerra
Andrés García Sandoval
Universidad de Guadalajara

Grupo Editorial Patria

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas

Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez

Supervisor de prepensa: Gerardo Briones González

Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís

Matemáticas discretas, aplicaciones y ejercicios

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,

Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-925-8

Impreso en México

Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Agradecimientos

Agradecemos a Editorial Patria, y en particular a la ing. Estela Delfín Ramírez, por creer en nosotros y darnos la oportunidad de aparecer en una de sus publicaciones, y así compartir nuestra experiencia con los lectores interesados en aprender matemáticas discretas.

También queremos agradecer a todas aquellas personas que nos apoyaron y nos dieron palabras de alienti para conluir esta obra

Prólogo

Este texto nació hace varios años como unos apuntes de clase para la materia de matemáticas discretas, constituido al principio solo por algunas decenas de páginas. Con el paso del tiempo los mismos fueron creciendo y tomando forma hasta ser lo que son hoy en día: un libro de texto en toda la extensión de la palabra. En el mismo se plasma nuestro interés y experiencia docente a lo largo de muchos años de impartir la materia.

Está diseñado para brindar a los estudiantes que cursan la materia de matemáticas discretas una herramienta adecuada, que cubra los conceptos fundamentales de sus principales áreas, pero abordados de una manera sencilla, clara y precisa, además de que sea fácil de leer y comprender, ya que no se pretende que sea un tratado demasiado riguroso sobre alguna parte concreta de las matemáticas discretas.

Cabe hacer mención que algunos de los capítulos requieren para su mayor entendimiento que el lector tenga conocimientos básicos de álgebra a nivel bachillerato; nos referimos en particular al capítulo 2 Lógica y cálculo proposicional, en el tema de inducción matemática; el capítulo 4 Relaciones de recurrencia; el capítulo 5 Combinatoria; el capítulo 8 Sistemas algebraicos y el capítulo 9 Álgebra de Boole, debido a que en los mismos se efectúan diversos procedimientos algebraicos que requieren conocimientos elementales de álgebra.

Muchos de nuestros alumnos que han tomado este curso expresaron que eran necesarios más problemas o ejercicios. Por ese motivo al final de cada capítulo se incluye una serie de problemas para resolver, además de los resueltos en los ejemplos de cada capítulo. Estos problemas también tienen la finalidad de reafirmar los conceptos aprendidos.

Hemos decidido no incluir programas de cómputo de manera explícita, esto debido al tiempo que se requiere para realizarlos; pero sí se presentan en algunos de los temas abordados diversos tratamientos algorítmicos que bien pueden resolverse con un programa.

Hasta estos momentos se ha hablado de la finalidad del libro, pero el lector se ha de estar haciendo las mismas preguntas que nos hacemos todos al iniciar un curso de esta naturaleza: ¿qué son las matemáticas discretas? y ¿por qué estudiar esta materia? En el CD anexo al libro se encuentra una animación con la respuesta a estas interrogantes. Por eso recomendamos ver dicha animación antes de dar inicio a la lectura del libro.

Por último, esperamos que esta obra cumpla con los requerimientos y esté a la altura de las expectativas del lector.

"En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas."

John von Neumann

Contenido

Capítulo 1.
Conceptos fudamentales 1

1.1 Conjuntos 2
Definiciones básicas de conjuntos 2
Operaciones con conjuntos 4

1.2 Conjuntos finitos e infinitos contables 5

1.3 El conjunto de los números enteros 9

1.4 Funciones 10

1.5 Sucesiones 12

1.6 Matrices 12
Resumen 16

Capítulo 2.
Lógica y cálculo proposicional 19

2.1 Introducción 20

2.2 Proposiciones y operadores lógicos 20
La proposición: características y estructura 20
Clasificación de las proposiciones 21
Traducción del lenguaje natural al simbólico y del lenguaje simbólico al natural 22
Operadores lógicos 23

2.3 Proposiciones condicionales 26
Condicional o implicación ($\Rightarrow$) 26
Bicondicional o equivalencia ($\Leftrightarrow$) 27

2.4 Tablas de verdad 27
Construcción de una tabla de verdad 28

2.5 Los argumentos: premisas y conclusiones 29
Clasificación de argumentos: tautología, contradicción y contingencia 31

2.6 Métodos de demostración 31
Método de tablas de verdad 31
Prueba formal de validez 34
Prueba de invalidez 39
Prueba condicional 41
Prueba indirecta 42

2.7 Inducción matemática 44
Primer principio de inducción matemática 44
Resumen 49

Capítulo 3.
Relaciones 54

3.1 Introducción 55

3.2 Definición y representación 55

3.3 Operaciones con relaciones 59

3.4 Composición de relaciones 62
Definición de composición de relaciones 62
Composición de tres relaciones 64
Potencias de relaciones 64

3.5 Propiedades de las relaciones 65
Relación reflexiva 65
Relación irreflexiva 65
Relación simétrica 66
Relación antisimétrica 66
Relación transitiva 68
Extensión transitiva 68
Cerradura transitiva 69

3.6 Relaciones de equivalencia 69
Partición de un conjunto 69
Relación de equivalencia 72
Clases de equivalencia 72

3.7 Órdenes parciales 73
Relación de orden parcial 73
Conjunto parcialmente ordenado 74
Comparabilidad e incomparabilidad 74
Conjunto totalmente ordenado 75
Cadena 75
Anticadena 75

3.8 Diagrama de Hasse y láttices 76
Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado 81
Elemento maximal 81
Láttice 83
Resumen 84

Capítulo 4.
Relaciones de recurrencia 92

4.1 Introducción 93
4.2 Progresiones aritméticas y geométricas 93
Progresiones aritméticas 93
Suma de términos de progresiones aritméticas 97
Propiedad de los términos equidistantes de una progresión aritmética 98
Interpolación de medios aritméticos 99
Progresiones geométricas 100
Suma de términos de progresiones geométricas 105
Propiedad de los términos equidistantes de una progresión geométrica 106
Producto P_n de términos de progresiones geométricas 107
Interpolación de medios geométricos 109
Suma de los términos de una progresión geométricacuando la razón común *r* es menor que 1 y el número de términos es infinito 110
4.3 Relación de recurrencia y sucesión de recurrencia 112
Relación de recurrencia 113
Sucesión de recurrencia 113
Relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes 121
4.4 Soluciones homogéneas 122
4.5 Soluciones particulares 126
4.6 Soluciones totales 130
Resumen 136

Capítulo 5.
Combinatoria 143

5.1 Introducción 144
5.2 Reglas de la suma y el producto 144
Principio o regla de la suma 145
Regla del producto (principio de elección) 148
5.3 Recursos de conteo: listas y árboles 150
5.4 Permutaciones y combinaciones 152
5.5 Permutaciones y combinaciones generalizadas 158
Permutaciones generalizadas (particiones ordenadas) 158
Combinaciones generalizadas 161
5.6 Principio de inclusión-exclusión 163
5.7 Principio de Dirichlet 167
5.8 Identidades básicas combinatorias 169
5.9 Teorema del binomio (binomio de Newton) y triángulo de Pascal 173
Triángulo de Pascal 177
Coeficientes multinomiales 179
Resumen 180

Capítulo 6.
Teoría de grafos 185

6.1 Introducción 186
6.2 Definiciones básicas y su representación 186
6.3 Terminología y caracterización de los grafos 190
Grafo dirigido 190
Grafo no dirigido 191
Orden y tamaño 191
Grafo finito 192
Incidencia y adyacencia 192
Grafo nulo 192
Lados paralelos y lazos 193
Grafo simple 193
Valencia de un vértice 194
Grafo completo 194
Grafo regular 196
Grafo bipartita 197
Subgrafos 198
6.4 Paseos y circuitos 199
Caminos y circuitos 200
Paseos y circuitos de Euler (eulerianos) 202
Paseos y circuitos de Hamilton (hamiltonianos) 206
6.5 Multígrafos y grafos pesados (grafos ponderados) 210
Multígrafo dirigido 210
Multígrafo no dirigido 212
Grafo ponderado 212
6.6 Representaciones matriciales 213
Matriz de adyacencia 214
Matriz de incidencia 215
6.7 Isomorfismo de grafos 216
6.8 Grafos aplanables 218

Grafo aplanable....218
Región de un grafo aplanable....218
Fórmula de Euler para grafos aplanables....219
Homeomorfismo de grafos....220
6.9 Algoritmos para grafos....223
Algoritmo....223
6.10 Coloreado de grafos....228
Algoritmo para colorear vértices....229
Teorema de los cuatro colores....231
Determinación del número cromático utilizando álgebra lineal....232
Resumen....233

Capítulo 7. Árboles....241

7.1 Introducción....242
7.2 Árboles....242
7.3 Árboles enraizados....244
Árbol dirigido....244
Árbol enraizado....244
Relaciones entre los vértices de un árbol enraizado....245
Subárbol....247
Árbol ordenado....248
Árboles isomorfos....248
Árbol *m*-ario....249
7.4 Longitud de paseo en árboles enraizados....249
Altura de un árbol....249
7.5 Código de prefijos (prefijos codificados)....250
Código de prefijos....250
7.6 Árboles de búsqueda binaria....252
Operaciones en árboles de búsqueda binaria....252
7.7 Árboles generadores y conjuntos de corte....254
Árbol y árbol generador de un grafo....254
Cuerda....255
Conjunto de corte....255
7.8 Árboles generadores mínimos....256
7.9 Recorridos en un árbol....257
Estructura de árboles binarios....257
Recorridos en árboles binarios....258
Recorrido en preorden....258
Recorrido en enorden....259
Recorrido en postorden....260
7.10 Árboles de expresión....261
Algoritmo para construir árboles de expresión....264
7.11 Árboles balanceados o árboles AVL....264
Rotación simple o sencilla....266
Rotación doble....268
Resumen....272

Capítulo 8. Sistemas algebraicos....275

8.1 Introducción....276
8.2 Grupos....276
Grupos de congruencias....281
Grupos cíclicos....283
Grupos de permutaciones....284
8.3 Subgrupos....287
8.4 Isomorfismo de grupos....288
8.5 Grupos cociente....289
8.6 Anillos....290
8.7 Isomorfismo de anillos....293
8.8 Campos....295
Campos finitos....295
8.9 Aplicaciones a criptografía de llave pública....299
Otros algoritmos de cifrado de llave pública....302
Aplicaciones de la criptografía de llave pública....303
Resumen....304

Capítulo 9. Álgebra de Boole....307

9.1 Introducción....308
9.2 Álgebra de Boole (álgebra booleana)....309
Suma booleana....309
Producto booleano....309
Complemento booleano....309
Propiedades adicionales del álgebra booleana....311
9.3 Funciones booleanas o funciones lógicas....315
Funciones booleanas....316
Representación de las funciones booleanas....317
9.4 Circuitos lógicos....324
Compuertas lógicas básicas....324
Compuertas lógicas derivadas....326

Circuitos lógicos 328

9.5 Propiedades de los circuitos lógicos 330

Circuitos lógicos equivalentes 334

9.6 Simplificación de circuitos 335

Expresiones booleanas minimales 336

Diagramas de subconjuntos 336

Mapas de Karnaugh 340

Producto fundamental 341

Productos fundamentales adyacentes 341

Mapas de Karnaugh de dos variables 342

Mapas de Karnaugh de tres variables 342

Mapas de Karnaugh de cuatro variables 343

Minimización de circuitos mediante mapas de Karnaugh 347

Resumen 349

Índice analítico 354

1

Conceptos fundamentales

Objetivos:

- Conocer las nociones básicas de la teoría de conjuntos.
- Comprender y aplicar las operaciones básicas de conjuntos en ejemplos cotidianos.
- Identificar las características que distinguen a los conjuntos finitos e infinitos numerables.
- Comprender las propiedades básicas presentes en el conjunto de los números enteros.
- Conocer el concepto de función.
- Comprender la dependencia de variables.
- Analizar el concepto de matriz como una herramienta básica para el uso ordenado y eficiente de datos.
- Comprender y aplicar las operaciones básicas de matrices.

1.1 Conjuntos

Este capítulo tiene como finalidad presentar y analizar los fundamentos básicos para el desarrollo y la aplicación de las matemáticas discretas. En esta sección abordamos las nociones básicas de la teoría de conjuntos, la cual ha permitido, en gran medida, la formalización y el desarrollo de las matemáticas. En un principio, Georg Cantor, matemático alemán (1845-1918), comenzó esta tarea mediante el análisis de las bases de las matemáticas, explicando todo con base en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hizo estrictamente a través de conjuntos). El alcance del colosal trabajo realizado por Cantor, logró unificar las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

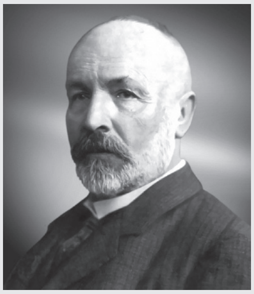


Figura 1.1 Georg Cantor (1845-1918).

George Cantor (San Petersburgo, 1845-Halle, Alemania, 1918), matemático alemán de origen ruso. En 1874, publicó su primer trabajo sobre teoría de conjuntos. Entre 1874 y 1897 demostró que el conjunto de los números enteros tenía el mismo número de elementos que el conjunto de los números pares, y que el número de puntos en un segmento es igual al número de puntos de una línea infinita, de un plano y de cualquier espacio. Es decir, que todos los conjuntos infinitos tienen "el mismo tamaño". Sin embargo, hasta entonces, el concepto de infinito en matemáticas había sido un tabú, por lo que se ganó algunos enemigos, en especial Leopold Kronecker, quien hizo todo lo imposible por arruinar la carrera de Cantor. Estancado en una institución docente de tercera clase, privado del reconocimiento por su trabajo y con frecuencia atacado por Kronecker, Cantor comenzó a tener problema de salud mental, lo que provocó que en 1884 sufriera su primera crisis nerviosa.

En la actualidad, se le considera como el padre de la teoría de conjuntos, punto de partida de excepcional importancia en el desarrollo de la matemática moderna.

Cantor murió en 1918 recluido en una institución para enfermos mentales.

Definiciones básicas de conjuntos

Para las matemáticas en general, la función que desempeñan las definiciones es básica, debido a que con ello se pretende establecer, sin ambigüedad, los conceptos utilizados. Aunque parezca poco increíble, la definición formal de un conjunto es una de las más difíciles de establecer en matemáticas. Pues, si por ejemplo usamos la definición: "Un conjunto es una colección bien definida de objetos"; entonces, surge la siguiente pregunta: ¿qué es una colección? Luego, entonces, es posible definir, por ejemplo, una colección como "un agregado de cosas"; pero, ¿qué es un agregado?, y así sucesivamente hasta desarrollar más definiciones. Como se puede observar, es fácil deducir que esto se vuelve cíclico; por tanto, los matemáticos consideran que debe haber conceptos primitivos o sin una definición formal.

No obstante, para efectos prácticos, en este libro **un conjunto** se considera **una colección bien definida de objetos**, con la esperanza de que, aunque dicha definición no es formal, la cotidianidad de la palabra "colección" nos permita avanzar sin mayores dificultades hacia el logro de los objetivos planteados. En otras palabras, esto significa que un conjunto no es solo cualquier colección de objetos, sino que además este debe estar bien definido en el sentido de que, si se considera cualquier objeto, se puede saber con certeza si es parte o no de la colección.

Es importante establecer que a los objetos de un conjunto se les llama **elementos** o **miembros** del conjunto, y es común representarlos con letras minúsculas, a, b, c..., mientras que la notación usual para los propios conjuntos es con letras mayúsculas, A, B, C....

Por otra parte, hay dos maneras comunes de especificar un conjunto dado. La primera es mediante la presentación de un listado de sus elementos entre llaves; por ejemplo, si aw consiste de todas las letras del alfabeto español, entonces a puede presentarse en la forma:

$$a = \{a, b, c, \ldots, z\}$$

La segunda forma de presentar un conjunto es especificando una regla que establece la propiedad o propiedades que un objeto debe satisfacer para ser considerado como un miembro del conjunto. Si se utiliza esta notación, el conjunto A puede ser presentado en la forma:

$$A = \{a, t \cdot q \cdot a \text{ es una letra del alfabeto español}\}$$

Y se lee: "A es el conjunto de todos los elementos a, tales que a es una letra del alfabeto español".

La notación que se usa para especificar que un objeto a es un elemento de un conjunto A es:

$$a \in A$$

Y se lee: "a es un elemento de A" o, en forma alternativa, "a pertenece a A".

Por otro lado, si el objeto a no es un elemento del conjunto A, entonces se escribe:

$$a \notin A$$

Y se lee: "a no es un elemento de A" o, en forma alternativa, "a no pertenece a A". Por ejemplo, si $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, se tiene que $\gamma \, \varepsilon \, A$, pero $\theta \notin A$.

De acuerdo con el concepto de conjunto definido antes, resulta claro que para que un conjunto A sea igual a un conjunto B, lo cual se denota por $A=B$, ambos deben tener exactamente los mismo elementos.

EJEMPLO

Sean A, B, C los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$C = \{1, 3, 5, 2, 4\}$$

Entonces, como B y C tienen exactamente los mismos elementos (aunque, en este caso, en orden distinto) $B = C$, pero $A \neq B$ y $A \neq C$, ya que $5 \notin A$ y $5 \in C$, pero $5 \notin A$.

Como se puede notar en el ejemplo anterior, todos los elementos de A pertenecen al conjunto B; es decir, todo el conjunto A está contenido en B. Esto es, formalmente se dice que A es un **subconjunto** de B y se denota por $A \subseteq B$ si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B. En caso de que A no sea subconjunto de B, se escribe $A \nsubseteq B$.

A partir de esta definición, se puede ver que $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

EJEMPLO

De acuerdo con los conjuntos A, B y C del ejemplo anterior, es fácil ver que $A \subseteq C$. Además, $B \subseteq C$ y $C \subseteq B$; por tanto, $B = C$. Si $D = \{1, 3, 5, 7\}$, entonces $D \nsubseteq A$ y $A \nsubseteq D$.

Es común utilizar la notación $A \subset B$ para el caso en que $A \subseteq B$, pero $A \neq B$; entonces, se dice que A es **subconjunto propio** de B.

EJEMPLO

Si $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ y $B = \{\delta, \varepsilon, \theta, \rho\}$ se tiene que $B \subset A$.

El conjunto que no contiene elementos se conoce como **conjunto vacío** y se denota por $\varnothing$ o $\{\}$. El conjunto vacío, $\varnothing$, a su vez, es subconjunto de cada conjunto A. Para ver esto, solo basta observar que $\varnothing$ no tiene elementos y, por tanto, no contiene elementos que no estén en A, es decir $\varnothing \subseteq A$.

Como contraparte del conjunto vacío, se tiene otro extremo, "el más grande", que se denomina **conjunto universo**. Un conjunto universo (o conjunto universal) es el conjunto de todos los elementos de interés en una discusión particular.

Operaciones con conjuntos

Así como los números se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir, entre otras operaciones, para obtener nuevos números también se tienen diversas operaciones que se pueden realizar con conjuntos dados para obtener nuevos conjuntos. En esta sección se ilustran algunas de estas.

Unión

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado con todos los elementos que están en A y/o en B, y se denota por $A \cup B$.

Esto se simboliza de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \text{ está en ambos}\}$$

EJEMPLO

Sean:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\} \text{ y } B = \{\delta, \varepsilon, \theta, \rho\}$$

entonces:

$$A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \rho\}$$

Intersección

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado con todos los elementos que están tanto en A como en B, y se denota por $A \cap B$. Esto se simboliza de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in A \text{ y } x \in B\}$$

EJEMPLO

Sean:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7\} \text{ y } C = \{2, 4, 6, 8\}$$

entonces:

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$
$$A \cap C = \{2, 4\}$$
$$B \cap C = \varnothing$$

Sea U el conjunto universo y A es un subconjunto de U entonces el conjunto de todos los elementos en U que no están en A se conoce como el complemento de A y se denota por A^c o A'. En símbolos se tiene:

$$A^c = \{x, \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in U, x \notin A\}$$

EJEMPLO

Sean:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ y } A = \{1, 3, 5, 7\}$$

entonces:

$$A^c = \{2, 4, 6, 8\}$$

Diferencia

La **diferencia** de conjuntos $A - B$ es el conjunto de todos los elementos de A que no están en B, en símbolos:

$$A - B = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La **diferencia simétrica** de A y B, que se denota por:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (B \cap A)$$

EJEMPLO

Sean:

$$A = \{a, b, c, d\} \text{ y } B = \{a, b, d, e\}$$

entonces:

$$A - B = \{c\}$$

$$A \oplus B = \{c, e\}$$

Las siguientes propiedades rigen las operaciones en conjuntos.

Sea U un conjunto universo. Si A, B y C son subconjuntos arbitrarios de U, entonces:

Tabla 1.1 Propiedades de las operaciones en conjuntos	
$A \cup B = B \cup A$	Ley conmutativa para la unión
$A \cap B = B \cap A$	Ley conmutativa para la intersección
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Ley asociativa para la unión
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Ley asociativa para la intersección
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Ley distributiva para la unión
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Ley distributiva para la intersección
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^C$	Ley de Morgan 1
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^C$	Ley de Morgan 2

Los diagramas de Venn son de gran utilidad para entender los conjuntos resultantes de cada operación definida en conjuntos, pero sobre todo para resolver problemas de aplicación que incluyen conjuntos. En dichos diagramas, el conjunto universo U se representa por un rectángulo, mientras que los subconjuntos de U se representan por regiones dentro del rectángulo. En la figura 1.2 se muestran los diagramas de Venn de las principales operaciones sobre conjuntos.

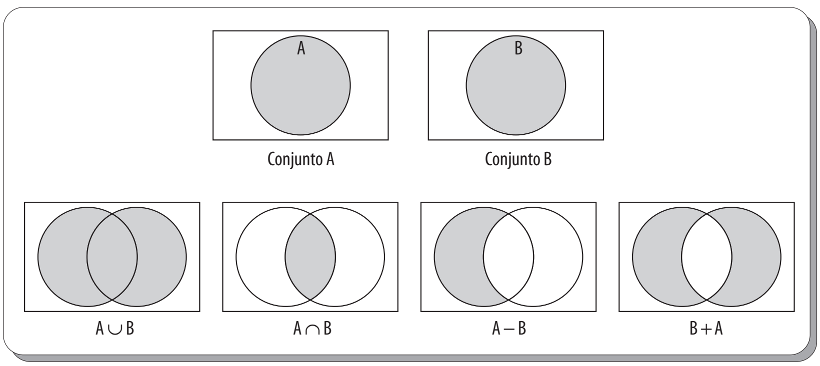


Figura 1.2 Diagramas de Venn de algunas operaciones sobre conjuntos.

1.2 Conjuntos finitos e infinitos contables

Cuando se habla de conjuntos infinitos, mucho del sentido común y de la intuición carecen precisamente de sentido, pues resulta imposible considerar que dos conjuntos, en apariencia uno con muchos más elementos que el otro, tengan en realidad la misma cantidad de elementos. No obstante, esto se aclara en la presente sección.

Recuérdese que la cardinalidad de un conjunto A es la cantidad de elementos distintos que posee el conjunto y se denota como: $|A|$.

EJEMPLO

a) Si $A = \{a, b, c\}$, $A = \{a, b, c\}$ o $A = \{a, \emptyset, d\}$, entonces $|A| = 3$.
b) Si $A = \{\{a, b\}, \{c\{d, e, f, g\}\}\}$, entonces $|A| = 2$.
c) Si $A = \emptyset$, entonces $|A| = 0$.
d) Si $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, entonces $|A| = n$.

Para encontrar el tamaño de dos conjuntos A y B, de manera comparativa, se utiliza el concepto de **correspondencia biunívoca**, que se define como: dados dos conjuntos A y B, se dice que existe una correspondencia uno a uno (biunívoca) entre los elementos de A y los de B, si es posible "hacer corresponder" los elementos de A y los de B, de tal manera que para cada par de elementos distintos de A les "correspondan" dos elementos distintos de B.

EJEMPLO

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b\}$ y los de $\{y, z\}$ (véase figura 1.3a), también entre los de $\{a, b, c\}$ y los de $\{\emptyset, y, z\}$ (véase figura 1.3b). Pero, no existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b, c\}$ y los de $\{y, z\}$ (véase figura 1.3c).

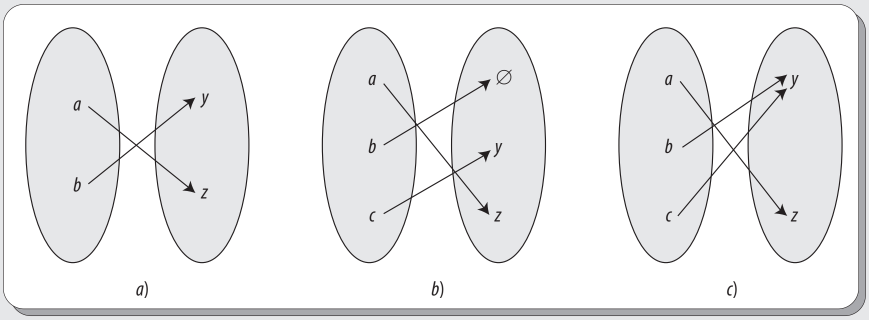


Figura 1.3 a) y b) son correspondencias biunívocas; c) no es correspondencia biunívoca.

EJEMPLO

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b\}$ y los de $\{c, d\}$ y entre los de $\{a, b, c\}$ y los de $\{\emptyset, a, b\}$. Pero no existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b, c\}$ y los de $\{a, d\}$.

Ahora, es posible establecer de manera concisa el concepto de conjunto finito: se dice que un conjunto A es finito si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y los elementos de un conjunto de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$, donde n es algún entero positivo fijo. Es fácil ver que si existe tal correspondencia biunívoca se tiene que: $|A| = n$.

EJEMPLO

Tanto el conjunto $A = \{a, \emptyset, d\}$ como el conjunto $B = \{a, b, d\}$ son finitos y de cardinalidad 3, ya que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos y los elementos del conjunto $\{1, 2, 3\}$, como se muestra en la figura 1.4.

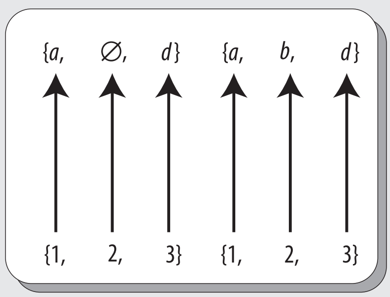


Figura 1.4 La cardinalidad de ambos conjuntos es 3.

El concepto de **conjunto infinito contable** se establece de una extensión “natural” del caso de conjuntos finitos; se dice que un conjunto es infinito contable (o infinito numerable) si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y los elementos de $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

EJEMPLO

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es por sí mismo un conjunto infinito contable, dado que se puede establecer la correspondencia biunívoca de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ (véase figura 1.5).

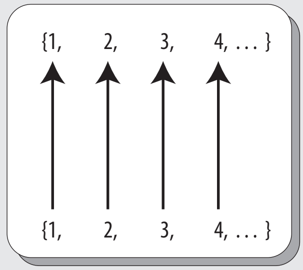


Figura 1.5 $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito contable.

EJEMPLO

El conjunto de todos los enteros pares no negativos $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ es un conjunto infinito contable, pues existe una correspondencia biunívoca entre dicho conjunto y los números naturales (véase figura 1.6); a saber, al entero $2k$ se le puede hacer corresponder el número natural k, para $k = 1, 2, \ldots$; es decir:

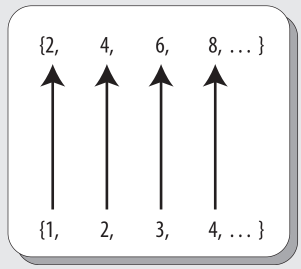


Figura 1.6 El conjunto de los pares es infinito contable.

EJEMPLO

De manera similar, el conjunto de todos los múltiplos de 7 no negativos $\{7, 14, 21, \ldots\}$ es infinito contable (véase figura 1.7).

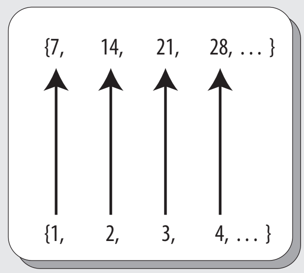


Figura 1.7 Los múltiplos de 7 son un conjunto infinito contable.

Una manera intuitiva de concebir lo que es un conjunto infinito contable es: un conjunto A es infinito contable si, comenzando con algún elemento fijo de A, es posible listar de manera sucesiva, uno detrás de otro, todos los elementos de A. Es fácil ver que de existir dicha lista, la correspondencia biunívoca del conjunto A con los números naturales estaría garantizada.

EJEMPLO

El conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es un conjunto infinito contable porque sus elementos pueden ser listados como $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots\}$, y, por tanto, se tiene una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathbb{Z}$ y los de $\mathbb{N}$ (véase figura 1.8); es decir:

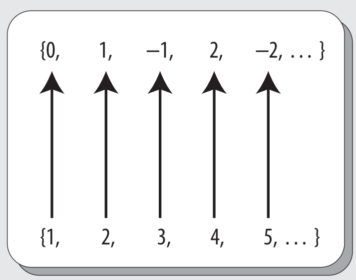


Figura 1.8 $\mathbb{Z}$ es un conjunto infinito contable.

EJEMPLO

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito contable, debido a que este puede ser listado como se muestra en la figura 1.9. Además, como se observa, es posible obtener una cantidad infinita contable de sublistas, en donde cada una es, al mismo tiempo, un conjunto infinito contable; la unión de todas estas es el conjunto $\mathbb{Q}$.

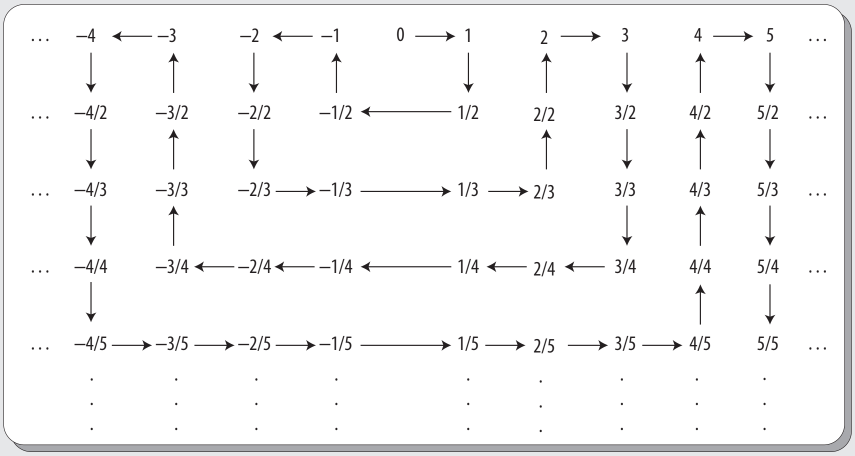


Figura 1.9 Lista de números racionales que demuestra que $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito contable.

Se dice que la cardinalidad de un conjunto infinito contable es $\aleph_0$. ($\aleph$ *Aleph* es la primera letra del alfabeto hebreo.)

Pero, también es posible encontrar conjuntos infinitos no contables, como el caso de los números reales entre 0 y 1. La manera de demostrarlo es a través de la reducción al absurdo; esto es, suponer que $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito contable y llegar a una contradicción.

Esto es, suponiendo que el conjunto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es infinito contable, necesariamente debe existir una correspondencia biunívoca entre $(0, 1)$ y el conjunto $\mathbb{N}$. En consecuencia, es posible listarlos de manera sucesiva, uno detrás de otro, de forma decimal, como se aprecia a continuación:

$$\begin{array}{c} 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots \\ 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \\ 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots \\ \vdots \\ 0.\, a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}\, a_{i4} \ldots \\ \vdots \end{array}$$

donde a_{ij} denota el j-ésimo dígito decimal del i-ésimo número de la lista.

Ahora, considérese el número donde:

$$b_i \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} & \text{si} \quad a_{ii} = 0, 1, 2, \ldots, 8 \end{cases}$$

Para todo i.

El número $0.\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$ es un número real entre 0 y 1 que es distinto de cada uno de los números de la lista anterior, porque difiere del primer número listado en el primer dígito, del segundo en el segundo dígito,… del i-ésimo número en el i-ésimo dígito y así sucesivamente. En consecuencia, se puede concluir que la lista anterior no incluye a todos los elementos del conjunto $(0, 1)$, lo cual contradice el supuesto de que $(0, 1)$ es infinito contable.

1.3 El conjunto de los números enteros

El sistema de los números naturales $\mathbb{N}$ tiene un defecto manifiesto; a saber, dados $m, n \in \mathbb{N}$, la ecuación $m + x = n$ puede o no tener solución; por ejemplo, la ecuaciones $m + x = m$ y $m + x = n$ $(m < m)$ carecen de solución. Es sabido que esto se soluciona introduciendo a los números naturales el cero y los números enteros negativos, a fin de formar el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Recuérdese que:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3\} \text{ y } \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

A continuación, se describen las propiedades algebraicas que satisfacen el conjunto de los números enteros con las operaciones de adición y multiplicación $\mathbb{Z}$.

Nota

El símbolo $\mathbb{Z}$ proviene del alemán *zahl*, que significa número.

Adición

Si $k, m, n \in \mathbb{Z}$ son tres números enteros cualesquiera, entonces:

1.	Propiedad de cerradura	$(k + m) \in \mathbb{Z}$
2.	Propiedad conmutativa	$k + m = m + k$
3.	Propiedad asociativa	$(k + m) + n = k + (n + m)$
4.	Neutro aditivo	$\exists$ un único elemento $0 \in \mathbb{Z}$, tal que $k + 0 = 0 + k = k, \forall k \in \mathbb{Z}$
5.	Inverso aditivo	Para cada $k \in \mathbb{Z}$ $\exists$ un único elemento $-k$, tal que $k + (-k) = (-k) + k = 0$

Multiplicación

1.	Propiedad de cerradura	$(k \cdot m) \in \mathbb{Z}$
2.	Propiedad conmutativa	$k \cdot m = m \cdot k$
3.	Propiedad asociativa	$(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (n \cdot m)$
4.	Inverso aditivo	$\exists$ un único elemento $1 \in \mathbb{Z}$, tal que $k \cdot 1 = 1 \cdot k = k$

Leyes distributivas

1.	$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$
2.	$(k + n) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$

Los números enteros poseen un conjunto de gran importancia por sus diversas aplicaciones: los números primos. Para definir con precisión qué es un número primo, primero introducimos el concepto de divisor: un entero $a \neq 0$ se llama divisor (o factor) de un $b \in \mathbb{Z}$, lo cual denota como $a \mid b$, si $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$. Cuando $a \mid b$, se dice que b es un múltiplo de a.

Ejemplo

a) $2|6$, ya que $6 = 2 \cdot 3$, con $3 \in \mathbb{Z}$.
b) $-3|15$, ya que $15 = (-3) \cdot (-5)$, con $-5 \in \mathbb{Z}$.
c) $a|0$, ya que $\forall\, a \in \mathbb{Z}$ se cumple $0 = a \cdot 0$, con $0 \in \mathbb{Z}$.

Nota

En este punto, es importante tener clara la diferencia que existe entre $a \mid 0$ y $0 \mid a$; de hecho, este último caso no es posible, pues implica una división por cero, la cual no está definida.

Entonces, se puede decir que ya se está en condiciones de aclarar, sin ambigüedad alguna, qué es un **número primo**: “se dice que un entero p es un número primo, si y solo si tiene exactamente cuatro divisores diferentes; a saber: ± 1 y $\pm p$.

EJEMPLO

a) 2 es primo, ya que sus únicos divisores son ± 2, ± 1.

b) -5 es primo, ya que sus únicos divisores son ± 5, ± 1.

c) 6 no es primo, ya que sus divisores son ± 6, ± 3, ± 2, ± 1.

d) 39 no es primo, ya que sus divisores son ± 39, ± 13, ± 3, ± 1.

e) 1 no es primo, ya que solo tiene dos divisores ± 1.

Es claro que $-p$ es primo si y solo si p lo es, por lo que solamente será necesario referirse a los primos positivos.

Por último, otro concepto importante acerca de los números enteros es el de **Máximo Común Divisor** (MCD), el cual, para dos enteros positivos, a y b se define como el mayor entero positivo que es divisor tanto de a como de b. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera: si $a \mid b$ y $a \mid c$ se dice que a es un divisor común de b y c; pero, si además todo divisor común de b y c también es de a, se dice que a es el máximo común divisor de b y c.

EJEMPLO

El conjunto de divisores comunes (positivos) de 24 y 60 es $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Entonces, en este caso, el MCD de 24 y 60 es 12.

1.4 Funciones

En matemáticas, el concepto de **función** es fundamental, incluyendo todas sus áreas de aplicación. Por ejemplo, en su desempeño profesional un biólogo puede necesitar conocer cómo depende el crecimiento de un cultivo de bacterias en función del tiempo y un químico puede requerir saber cuál es la rapidez de reacción inicial de una sustancia en función de la cantidad utilizada, entre otras cosas. Pues, la relación entre cantidades es descrita de manera conveniente usando el concepto de función.

De manera intuitiva, se puede comparar a una función con una máquina, de tal suerte que si se introduce un número a dicha máquina, esta lo transforma en otro número. Por supuesto, las funciones no se limitan a números y, en general, se puede considerar una **función** f de un conjunto X a un conjunto Y, que se denota por $f: X \to Y$ como una regla que asigna a cada elemento x de X uno y solo un elemento y de Y.

Por tanto, es útil representar al número en la forma $f(x)$, lo cual se lee f de x, pues dicha notación enfatiza el hecho de que el número y depende del número x.

EJEMPLO

Sea f la función que transforma cada entero en su cubo, es decir $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, donde f se define por $f(x) = x^3$. Entonces, por ejemplo, el número entero 2 es transformado por la regla f al número entero 8, ya que: $f(2) = 2^3 = 8$.

Dada una función $f: X \to Y$ al conjunto de todos los elementos $x \in X$ que f puede transformar sin ambigüedad a un elemento $y \in Y$, se le denomina dominio de f y se denota por $dom\{f\}$. Por su parte, al conjunto de todos los elementos $y = f(x)$ que se obtienen al recorrer todo $dom\{f\}$, se le denomina rango o imagen de f y se denota por $im\{f\}$.

Ejemplo

Para la función f definida en $\mathbb{R}$ por: $f(x)=\frac{1+x}{2x}$

El dominio de la función son todos los números reales excepto $x = 0$, ya que dicho valor es el único que no tiene correspondencia con un valor real, pues la división por cero no está definida. Por tanto, podemos escribir:

$$dom\{f\} = \{x \in \mathbb{R}\ \mathrm{t\cdot q\cdot}\ x \neq 0\}$$

Si para una función en particular conocemos su regla de transformación $f(x)$, es útil, en diversas aplicaciones, averiguar cuál es el elemento x que fue transformado al $f(x)$ dado.

Por desgracia, no siempre es posible saber esto con certeza; por ejemplo, si consideramos al número 4 como un elemento convertido por la regla $f(x) = x^2$, es claro que existe ambigüedad para determinar el valor de x, ya que hay dos opciones posibles: $x = 2$ y $x = -2$. No obstante, dicha ambigüedad no existe para funciones f que tienen la característica de que para cada par de elementos $x_1, x_2 \in dom\{f\}$ con $x_1 \neq x_2$ las imágenes correspondientes también son distintas: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Una función de este tipo se denomina **biunívoca**, la cual, como se dijo antes, por supuesto es equivalente al concepto de correspondencia biunívoca descrito y utilizado en la sección anterior.

Ejemplo

Determinar si las funciones siguientes son o no biunívocas en todo su dominio.

a) $f(x) = 1 - 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$

c) $f(x) = x^2$

Solución

Para verificar si una función es biunívoca o no, primero se puede asumir que dos valores transformados son iguales, $f(x_1) = f(x_2)$, y si dicha aseveración implica que los argumentos son iguales, $x_1 = x_2$, entonces es posible concluir que la función es biunívoca (¿por qué?).

Entonces:

a) Sea $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $1 - 3x_1 = 1 - 3x_2$. Si en la ecuación anterior restamos 1 en ambos lados se obtiene $-3x_1 = -3x_2$. Por último, si dividimos ambos lados de la ecuación por -3 se tiene que $x_1 = x_2$. Por tanto, es posible concluir que la función f es biunívoca.

b) Del mismo modo, sea $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $\frac{1}{1+2x_1}=\frac{1}{1+2x_2}$. En este caso, primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por los factores $(1 + 2x_1)(1 + 2x_2)$, lo que da como resultado $1 + 2x_2 = 1 + 2x_1$. Ahora bien, restamos 1 en ambos lados, con lo que se obtiene $2x_2 = 2x_1$. Por último, dividimos ambos lados de la ecuación por 2 y se obtiene $2x_2 = 2x_1$. Por tanto, concluimos que la función f es biunívoca.

c) Ahora, aseguramos que la función dada no es biunívoca. Para ver esto, sea $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $(x_1)^2 = (x_2)^2$. Es importante destacar que es fácil cometer el error de concluir que la última ecuación implica que $x_1 = x_2$ cuando en realidad se tiene que $x_1 = \pm x_2$. Entonces, como no existe una único valor para el cual $f(x_1) = f(x_2)$, se concluye que la función dada no es biunívoca.

1.5 Sucesiones

Es importante hacer notar que el término sucesión se usa con mucha frecuencia en el ámbito coloquial, ya que se emplea por lo común para indicar una serie de eventos, donde uno sigue a otro en un orden definido. Algo análogo ocurre con las sucesiones numéricas, solo que en lugar de tratarse de eventos se trata de términos numéricos.

De manera intuitiva, una sucesión S es una simple lista de objetos llamados elementos, los cuales forman un conjunto, donde además los elementos están uno detrás de otro en el orden natural creciente de los números naturales $\mathbb{N}$.

Si la sucesión es finita, esta puede terminar después de un cierto número de términos o puede (en principio, al menos) seguir en forma indefinida; en este caso, se dice que es infinita. En este sentido, se puede decir que son conjuntos infinitos contables.

Una sucesión general, es decir una sucesión en la que no se especifican los términos, puede escribirse como:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

o algunas veces como:

$$x_n,\ 1 \le n < \infty$$

Si x es una sucesión, entonces se escribe como:

$$X = (x_n)$$

En un sentido formal, se dice que una sucesión (x_n) es una función $S:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de una variable n donde $dom\{S\} = \mathbb{N}$; es decir, a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un número real x_n, el término n-ésimo de la sucesión.

Una diferencia sustancial entre un conjunto cualquiera y una sucesión es que en una sucesión se pueden tener términos repetidos.

EJEMPLO

a) $(x_n) = \{1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots\}$

b) $(x_n) = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$

c) $x_n = n^2, 1 \le n < \infty$, es decir $(x_n) = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$

d) $x_n = (-1)^n, 1 \le n < \infty$, es decir $(x_n) = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$

e) $x_n = \dfrac{1}{2^n}, 1 \le n < \infty$, es decir $(x_n) = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots\right\}$

1.6 Matrices

Hoy día, en el ámbito cotidiano existen muchos problemas prácticos que pueden ser resueltos mediante operaciones aritméticas aplicadas a los datos asociados al problema dado. Organizando los datos en arreglos numéricos de filas y columnas, es factible llevar a cabo de manera eficiente los cálculos aritméticos necesarios para resolver un problema de este tipo. Además, una gran ventaja de utilizar un ordenamiento de filas y columnas para los datos, es que el manejo en una computadora es muy sencillo y, por tanto, todos los cálculos pueden realizarse con precisión y eficiencia.

Desde el punto de vista formal, un arreglo rectangular de datos se denomina **matriz**. De este modo, se dice que una matriz que consta de m filas y n columnas tiene tamaño $m \times n$; en tanto, cuando $m = n$ se dice que la matriz es cuadrada. La entrada en el i-ésimo renglón y j-ésima columna en una matriz A se denota por a_{ij}; es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una forma práctica de denotar la matriz A es $A = (a_{ij})$.

Ejemplo

Considerar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 319 & 281 & 455 & 285 \\ 475 & 365 & 580 & 0 \\ 545 & 425 & 180 & 880 \end{bmatrix}$$

a) Determinar cuál es el tamaño de la matriz.
b) Encontrar a_{32}.
c) Determinar la suma de las entradas de la primera fila.
d) Establecer la suma de entradas de la cuarta columna.

Solución

a) El tamaño de la matriz es 3×4, ya que la matriz consta de 3 renglones y 4 columnas.
b) La entrada a_{32} corresponde al elemento de la matriz ubicado en el renglón 3 y columna 2, es decir $a_{32} = 425$
c) La suma del primer renglón es $319 + 281 + 455 + 285 = 1\,340$
d) La suma de la primera columna es $285 + 0 + 880 = 1\,165$

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si y solo si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales, es decir:

$$a_{ij} = b_{ij} \; \forall \; i, j \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Determinar $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, de manera que:

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2w \\ 2 & y-1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Considerando que las entradas correspondientes de las dos matrices deben ser iguales, entonces: $x = -3$, $2 \cdot w = -4$, y $y - 1 = 0$; por tanto, $x = -3$, $w = -2$ y $y = 1$.

Dado que una matriz es un arreglo de datos, es posible definir operaciones sobre esta. En primer lugar, si A y B son dos matrices del mismo tamaño, el resultado de la **adición** de A y B es la matriz suma $A+B$, que se obtiene de la adición de todas y cada una las entradas correspondientes de A y B; es decir:

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$$

De forma equivalente, la **diferencia** $A-B$ es la matriz obtenida por restar las correspondientes entradas en B de A; es decir:

$$A-B = (a_{ij} - b_{ij})$$

Ejemplo

Considerar las siguientes matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 10 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces, se tiene que:

$$A+B = \begin{bmatrix} -2+1 & 7+14 \\ 3+10 & -5+(-5) \\ 1+(-1) & 0+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 21 \\ 13 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Y la diferencia de $A-B$ es:

$$A-B = \begin{bmatrix} -2-1 & 7-14 \\ 3-10 & -5-(-5) \\ 1-(-1) & 0-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -7 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Otra operación importante en aplicaciones de matrices es la **multiplicación por un escalar** (en este contexto, un escalar representa cualquier número real). De este modo, el producto de una matriz A por un escalar c es la matriz que se obtiene de la multiplicación de cada entrada de la matriz A por el escalar c, es decir:

$$cA = (ca_{ij})$$

EJEMPLO

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } c = -4$$

Entonces , cA es la matriz:

$$cA = \begin{bmatrix} (-4)(3) & (-4)(2) & (-4)(1) \\ (-4)(-1) & (-4)(0) & (-4)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 4 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

Además de las anteriores, hay otra operación importante en aplicación matricial: la multiplicación de matrices. A diferencia de las operaciones consideradas hasta ahora, la multiplicación de matrices no tiene una definición "natural". De este modo, si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y B es una matriz de tamaño $n \times k$; entonces, el **producto** de A con B, que se denota por $AB = (c_{ij})$, es la matriz de tamaño $m \times k$, cuya entrada en el renglón i y columna j, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$, es:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Los puntos más importantes para recordar de esta definición son:

1. Para que exista el producto AB es necesario que el número de columnas de la primera matriz, de izquierda a derecha, A, sea igual al número de renglones de la segunda matriz, de izquierda a derecha, B.
2. Si se cumple el requisito del inciso a), con A de tamaño $m \times n$ y B es de tamaño $n \times k$, entonces la matriz producto tendrá el mismo número de renglones que A y el mismo número de columnas que B.
3. Para obtener el elemento de la matriz producto AB ubicado en el i-ésimo renglón y j-ésima columna, se deben sumar los productos que resultan de multiplicar la primera entrada del renglón i de A con la primera entrada de la columna j de B, la segunda entrada del renglón i de A con la segunda entrada de la columna j de B, y así sucesivamente.

EJEMPLO

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar AB, siempre que el producto matricial esté definido.

Solución

En este caso, primero debemos verificar si el producto matricial AB está bien definido; es decir, es indispensable comprobar que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz B lo cual aquí se cumple. En segundo lugar, debemos establecer el tamaño de la matriz producto. La matriz producto debe tener el mismo número de renglones que A y el mismo número de columnas que B; por tanto, el tamaño de AB es 2×3. Entonces, el resultado esperado es una matriz de la forma

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Continúa

en la que para obtener el elemento ubicado en el primer renglón y en la primera columna, c_{11}, se suman los productos obtenidos de la multiplicación del primer renglón de A con la primera columna de B, término a término, es decir:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$
$$c_{11} = (-1)(1) + (2)(-1) + (6)(5) = 27$$

Del mismo modo, para calcular se suman los productos obtenidos de la multiplicación del primer renglón de A con la segunda columna de B, término a término, es decir:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{31}$$
$$c_{12} = (-1)(0) + (2)(1) + (6)(-1) = -4$$

Si seguimos con este procedimiento, al cabo del mismo se obtiene:

$$c_{13} = (-1)(3) + (2)(6) + (6)(1) = 15$$
$$c_{21} = (0)(1) + (3)(-1) + (-2)(5) = -13$$
$$c_{22} = (0)(0) + (3)(1) + (-2)(-1) = 5$$
$$c_{23} = (0)(3) + (3)(6) + (-2)(1) = 16$$

lo que completa la matriz producto:

$$AB = \begin{bmatrix} 27 & -4 & 15 \\ -13 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

A continuación se describen las propiedades algebraicas que satisfacen las matrices con las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y multiplicación matricial (la diferencia de matrices $A-B$ se puede ver como la suma $A+(-B)$).

Si A, B, C son matrices del mismo tamaño, y c y d son dos números reales cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1.	Propiedad conmutativa	$A + B = B + A$
2.	Propiedad asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
3.	Leyes distributivas	$c(A + B) = cA + cB$ y $(A + B)c = Ac + Bc$
4.	Ley asociativa escalar	$c(dA) = (cd)A$

Además, si los productos y las sumas están definidos para A, B, C, entonces:

5.	Propiedad asociativa	$(AB)\,C = A\,(BC)$
6.	Ley distributiva	$A(B + C) = AB + AC$

EJEMPLO

Para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -8 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Continúa

Realizar la operación indicada siempre que esté definida:

a) AB b) BA c) $BA - 2C$

Solución

a) El producto AB no está definido, ya que el número de columnas de la primera matriz (de izquierda a derecha), es 3 y este número es diferente al número de columnas de la segunda matriz, que es 2.

b) El producto BA sí está definido, pues B es de tamaño 2×3 (tres renglones) y la matriz A de tamaño 3×3 (tres columnas). Por tanto, la matriz producto será de tamaño 2×3 (número de filas de $B \times$ número de columnas de A). De este modo, la matriz BA es:

$$BA = \begin{bmatrix} 2(0)+4(-1)+10(7) & 2(2)+4(3)+10(4) & 2(-1)+4(2)+10(-6) \\ -8(0)+(-1)(-1)+2(7) & -8(2)+(-1)(3)+2(8) & -8(-1)+(-1)(2)+2(-6) \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$BA = \begin{bmatrix} 66 & 56 & -54 \\ 15 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

c) Considerando que la matriz $-2C$ es del mismo tamaño que la matriz BA, la operación $BA-2C$ sí está definida:

$$BA-2C = \begin{bmatrix} 66 & 56 & -54 \\ 15 & -11 & -6 \end{bmatrix} -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 56 & -54 \\ 15 & -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$BA-2C = \begin{bmatrix} 64 & 52 & -52 \\ 9 & -13 & -8 \end{bmatrix}$$

Resumen

En este capítulo se presentaron y analizaron los principales conceptos fundamentales relacionados con el desarrollo y la aplicación de las matemáticas discretas y de diversos objetos discretos, con la finalidad de adoptar una terminología común a lo largo del libro para poder trabajar con ellos de una manera adecuada.

En primer lugar se abordaron las nociones básicas de la teoría de conjuntos, la cual ha permitido la formalización y desarrollo de las matemáticas, y por ende de las matemáticas discretas. Entre ellas pueden resaltar la de conjunto que, como se indicó, es una de las más difíciles de formalizar, además de analizar las principales operaciones que pueden efectuarse sobre los conjuntos.

Luego se habló de los conjuntos cuya cardinalidad es finita, y de aquellos cuya cardinalidad es infinita contable; esto es, en los que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y los elementos de los números naturales.

Enseguida se presentaron las propiedades algebraicas del conjunto de los números enteros, para proseguir con la definición y análisis del concepto de función, que a final de cuentas es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un y solo un elemento de otro conjunto.

Problemas propuestos

En los ejercicios 1.1 a 1.8 determinar si la proposición es falsa o verdadera.

1.1 $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 1, 2, 3\}$

1.2 $\varnothing \in X$

1.3 $X \in X$

1.4 $X \subset X$

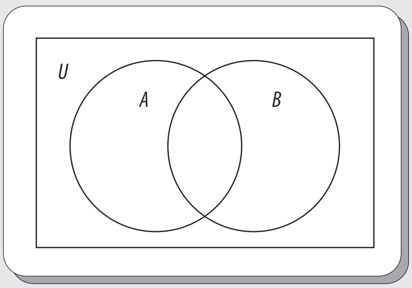
1.5 $0 = \varnothing$

1.6 $0 \in \varnothing$

1.7 $\{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$

1.8 {Sentra®, Tsuru®, Xtrail®} $\subset$ {Nissan®}

En los ejercicios 1.9 al 1.16 en un diagrama de Venn sombrear la región adecuada que represente la operación indicada.



1.9 $A^c \cap B$

1.10 $A^c \cap B^c$

1.11 $(A^c \cap B^c)$

1.12 $(A \cup B)^c$

1.13 $A - B$

1.14 $A^c - B$

1.15 $A^c - B^c$

1.16 $A \oplus B$

En los ejercicios 1.17 a 1.25 determinar el conjunto resultante de la operación indicada, considerando el conjunto universo como $U = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \leq x \leq 9\}$, y los subconjuntos $A = \{2x\text{t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{2x + 1\text{t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \leq x \leq 4\}$ y $C = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \leq x \leq 4\}$.

1.17 B^C

1.18 $A \cup B^c$

1.19 $A \cap A^c$

1.20 $(A \cap B) \cup C$

1.21 $(A \cup B) \cup C$

1.22 $(A \cup B) \cap C$

1.23 $(A \cup B) \cup A^c$

1.24 $(A \cup B)^c \cup C$

1.25 $(A \cup B)^c \cap C^c$

En los ejercicios 1.26 a 1.29 determinar si el conjunto dado es finito, infinito numerable o infinito no numerable.

1.26 $A = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{R} \text{ y } 2 \leq x \leq 3\}$

1.27 $A = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ y } 2 \leq x \leq \infty\}$

1.28 $A = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Q} \text{ y } 0 \leq x \leq \infty\}$

1.29 $A = \{x \text{ t} \cdot \text{q} \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ y } -100\,000 \leq x \leq 15\}$

En los ejercicios 1.30 a 1.34 analizar si la correspondencia dada define una función para todos los valores de su dominio.

1.30 $f(x) = 10^x$

1.31 $f(x) = x^3 + x$

1.32 $f(x) = -3 \pm \sqrt{x-2},\ x \geq 2$

1.33 $f(x) = -3 - \sqrt[3]{x-2}$

1.34 $f(x) = \dfrac{x}{x-5},\ x \neq 5$

En los ejercicios 1.35 a 1.40 determinar si la función dada es biunívoca para todos los valores de su dominio.

1.35 $f(x) = x^2 + x$

1.36 $f(x) = x^3 + x^2$

1.37 $f(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1$

1.38 $f(x) = |x|$

1.39 $f(x) = \dfrac{x}{x-5},\ x \neq !$

1.40 $f(x) = \ln(x^2)$

1.41 Sea: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$